Statistique et aide à la décision
Session 5

David Causeur
Agrocampus Ouest
IRMAR CNRS UMR 6625

Plan

Classification

Classification

On cherche à prédire $Y_0 \in \{y_1, \ldots, y_K\}$ pour un individu pour lequel les variables explicatives $X = (X_1, \ldots, X_p)'$ prennent les valeurs $x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0p})'$

Lorsque la variable réponse est catégorielle, prédire peut signifier :

- Estimer la probabilité *a posteriori* $\mathbb{P}(Y_0 = y_k \mid X_0 = x_0)$,
- Donner une valeur $\hat{Y}_0 = y_k$ connaissant x_0

- `predict(mod,type)`
- RStudio

Classification

La règle de décision conduisant à prédire la valeur de Y_0 pour un individu pour lequel $X_0 = x_0$ est appelée règle de classification.

La règle de classification de Bayes consiste à donner à Y_0 la valeur y_k de plus grande probabilité $\mathbb{P}(Y_0 = y_k \mid X_0 = x_0)$.

- 

Plan

Erreurs de prédiction

Suite de l'article de Julie Kern, futura-sciences.com, 2 mai 2020

Une sensibilité encore trop faible

Une étude scientifique prépubliée a passé au crible neuf tests immunologiques développés au Danemark. Trois sont des tests immuno-enzymatiques Elisa (*Enzyme-Linked Immuno Assay)* réalisés par un technicien de laboratoire. Les six autres sont des tests appelés « *point of care* » (POC), qui donnent des résultats rapides et sont réalisables hors des laboratoires, à l'image du kit NG Biotech.

Les trois tests Elisa ont une sensibilité située entre 67 et 93 % et une spécificité entre 93 à 100 %. De leur côté, les POC démontrent une sensibilité située entre 80 et 93 % et une spécificité entre 80 et 100 %. Mais ils n'ont été testés que sur une trentaine de personnes, ce qui est insuffisant pour les homologuer. Il faudrait les éprouver sur des milliers de personnes atteintes du Covid-19 et sur autant de personnes saines.

Erreurs de prédiction

Lorsque $Y = \pm 1$ est une réponse catégorielle à deux groupes, les individus pour lesquels $\hat{Y} = +1$ sont dits positifs et ceux pour lesquels $\hat{Y} = -1$ sont dits négatifs.

- Taux de vrais positifs (sensibilité) :

$$\text{TPR} = \frac{\#\left\{i = 1, \ldots, n,\ \hat{Y}_i = +1,\ Y_i = +1\right\}}{\#\left\{i = 1, \ldots, n,\ Y_i = +1\right\}}.$$

- Taux de vrais négatifs (spécificité) :

$$\text{TNR} = \frac{\#\left\{i = 1, \ldots, n,\ \hat{Y}_i = -1,\ Y_i = -1\right\}}{\#\left\{i = 1, \ldots, n,\ Y_i = -1\right\}}.$$

Erreurs de prédiction

Supposons que le test d'une maladie d'incidence $p = \mathbb{P}(Y = +1) = 0.0001$ garantisse $\text{TPR} = \text{TNR} = 0.9$

Probabilité qu'un individu positif soit malade :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = +1 \mid \hat{Y} = +1) &= \mathbb{P}(\hat{Y} = +1 \mid Y = +1) \frac{\mathbb{P}(Y = +1)}{\mathbb{P}(\hat{Y} = +1)}, \\ &= \text{TPR} \times \frac{p}{\mathbb{P}(\hat{Y} = +1)}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\hat{Y} = +1) &= \mathbb{P}(\hat{Y} = +1 \mid Y = +1)p + \mathbb{P}(\hat{Y} = +1 \mid Y = -1)(1 - p), \\ &= \text{TPR} \times p + (1 - \text{TNR}) \times (1 - p), \\ &= 0.10008. \end{aligned}$$

Erreurs de prédiction

Supposons que le test d'une maladie d'incidence $p = \mathbb{P}(Y = +1) = 0.0001$ garantisse $\text{TPR} = \text{TNR} = 0.9$

Probabilité qu'un individu positif soit malade :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = +1 \mid \hat{Y} = +1) &= \mathbb{P}(\hat{Y} = +1 \mid Y = +1) \frac{\mathbb{P}(Y = +1)}{\mathbb{P}(\hat{Y} = +1)}, \\
&= \text{TPR} \times \frac{p}{\mathbb{P}(\hat{Y} = +1)}, \\
&= 0.0009
\end{aligned}$$

Conlusion : une bonne sensibibilité et une bonne spécificité **ne garantissent pas** une bonne performance de prédiction !

Erreurs de prédiction

- Précision (Positive Predictive Value) :

$$\text{PPV} = \frac{\#\left\{i = 1, \ldots, n,\ \hat{Y}_i = +1,\ Y_i = +1\right\}}{\#\left\{i = 1, \ldots, n,\ \hat{Y}_i = +1\right\}}.$$

- Negative Predictive Value :

$$\text{NPV} = \frac{\#\left\{i = 1, \ldots, n,\ \hat{Y}_i = -1,\ Y_i = -1\right\}}{\#\left\{i = 1, \ldots, n,\ \hat{Y}_i = -1\right\}}.$$

- 

Erreurs de prédiction

Compromis TPR-TNR par le choix d'un seuil de décision

$$\hat{Y}_0 = +1 \text{ si } \hat{P}(Y = +1 \mid X_0 = x_0) \geq t$$

La stratégie du choix de t dépend du compromis recherché

- `Package ROCR`
- RStudio®

Plan

Evaluation d'une performance de classification

Objectif : s'assurer que $\hat{Y}_0 \approx Y_0$?

Attention : l'évaluation à partir de $(\hat{Y}_i, Y_i)_{i=1,\ldots,n}$ est optimiste.

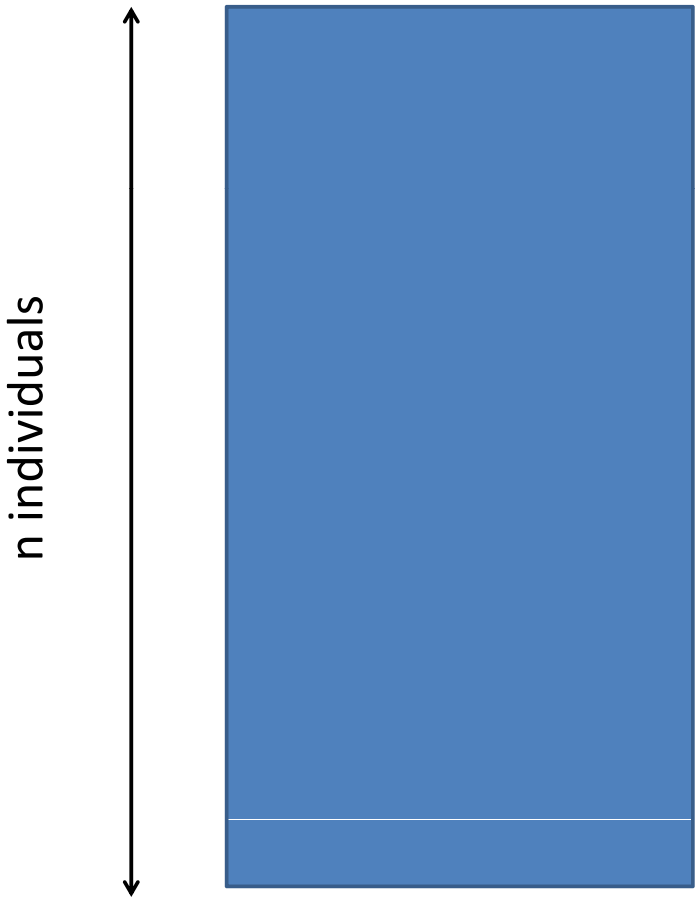
> Une procédure d'évaluation à partir de $(\hat{Y}_{-i}, Y_i)$ où la règle de prédiction ayant conduit à $\hat{Y}_{-i}$ n'implique pas Y_i, est dite de validation croisée.

Recommandation : la règle de prédiction ajustée sur un échantillon d'apprentissage doit être évaluée par application sur un échantillon test, séparé de l'échantillon d'apprentissage.

- 

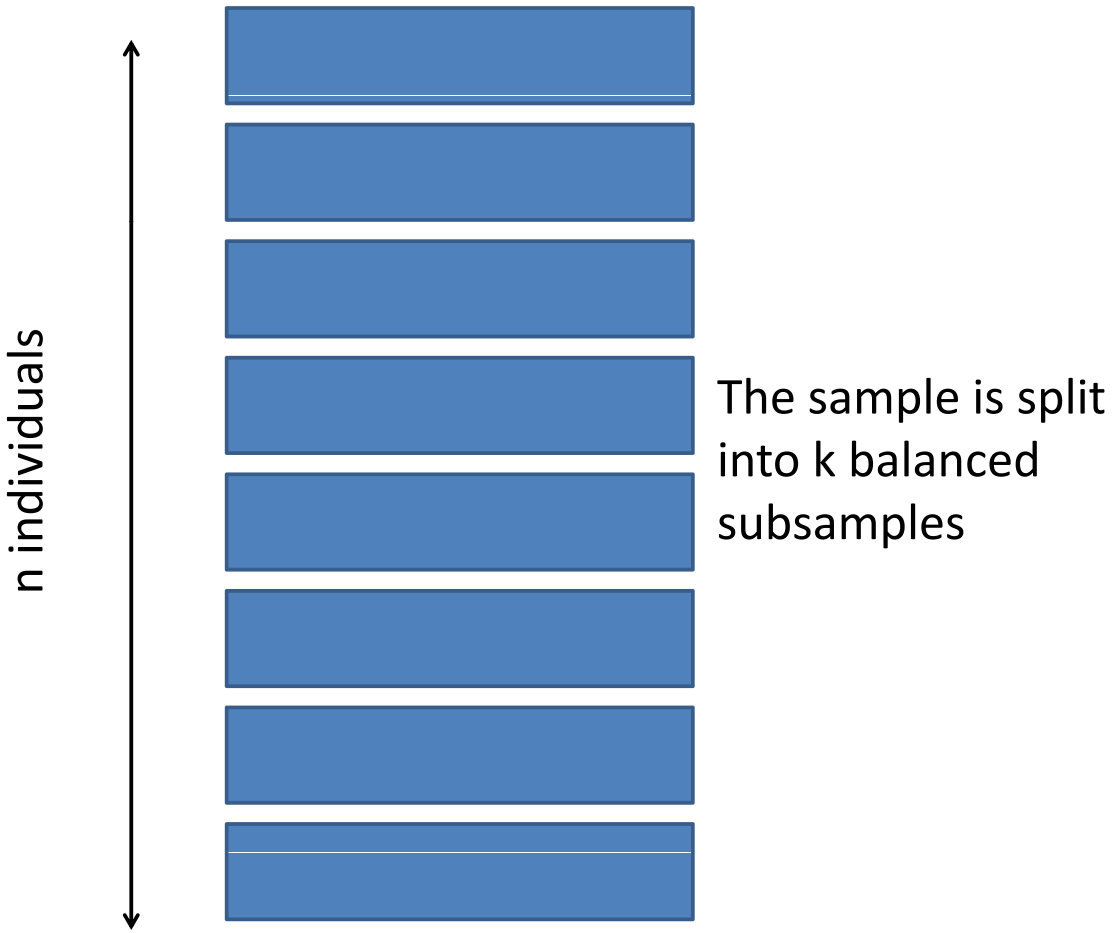
Evaluation d'une performance de classification

Si *n* est petit, procédure de validation croisée à *K* segments



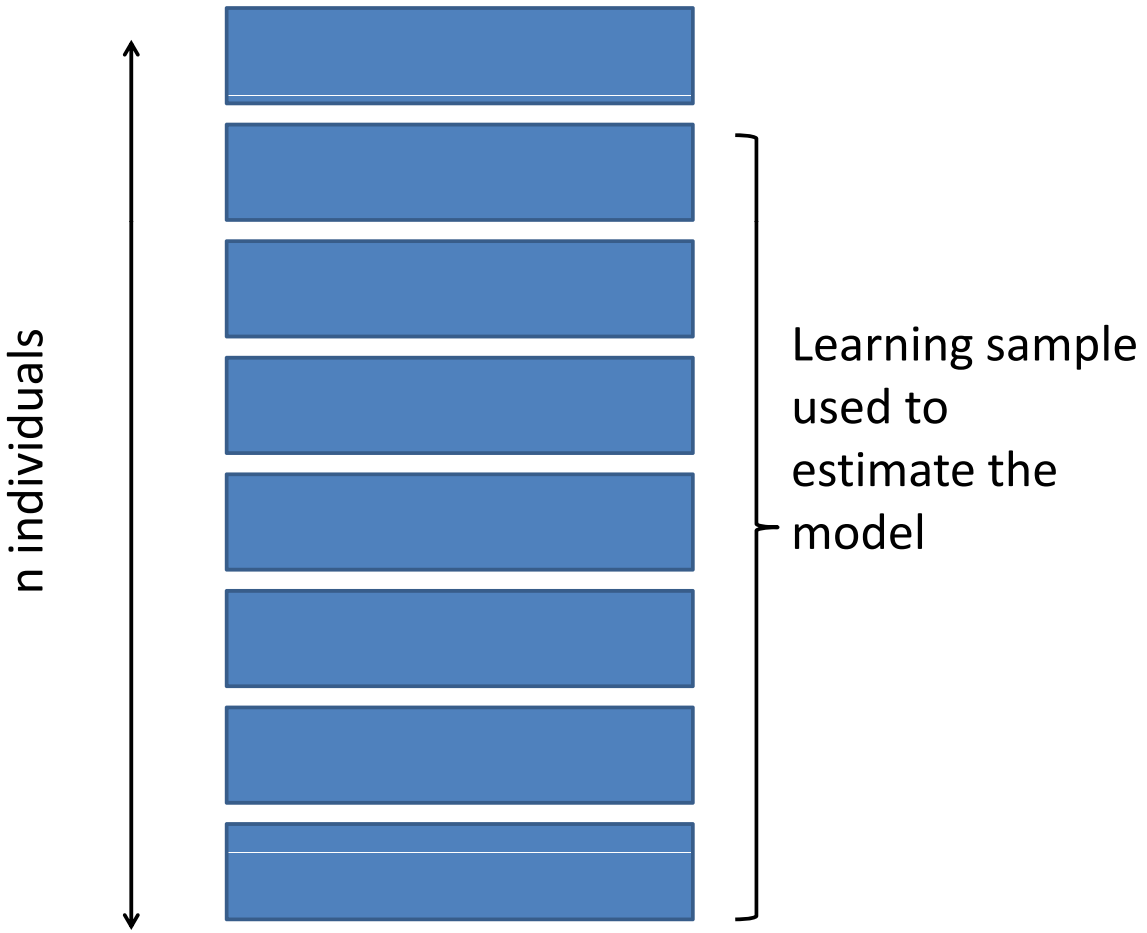
Evaluation d'une performance de classification

Si *n* est petit, procédure de validation croisée à *K* segments



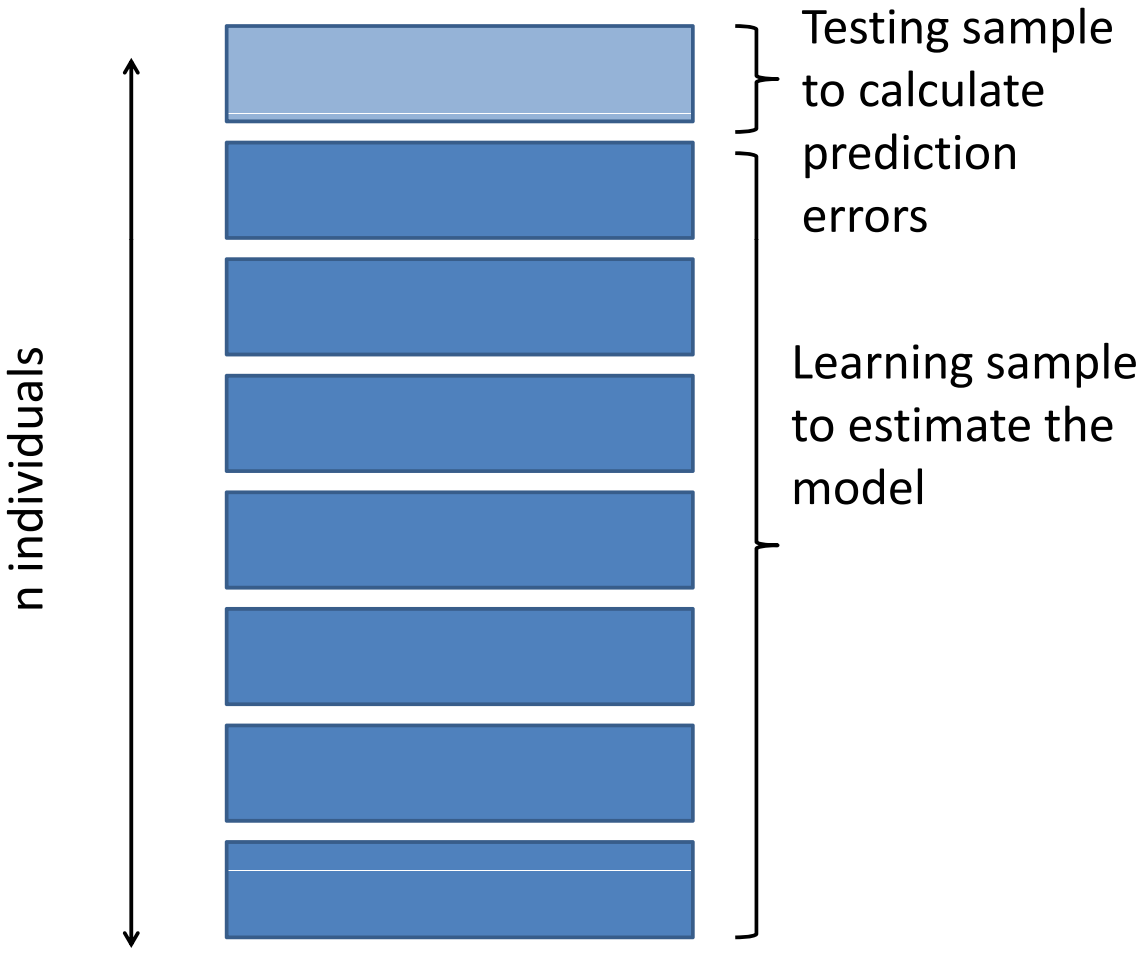
Evaluation d'une performance de classification

Si *n* est petit, procédure de validation croisée à *K* segments



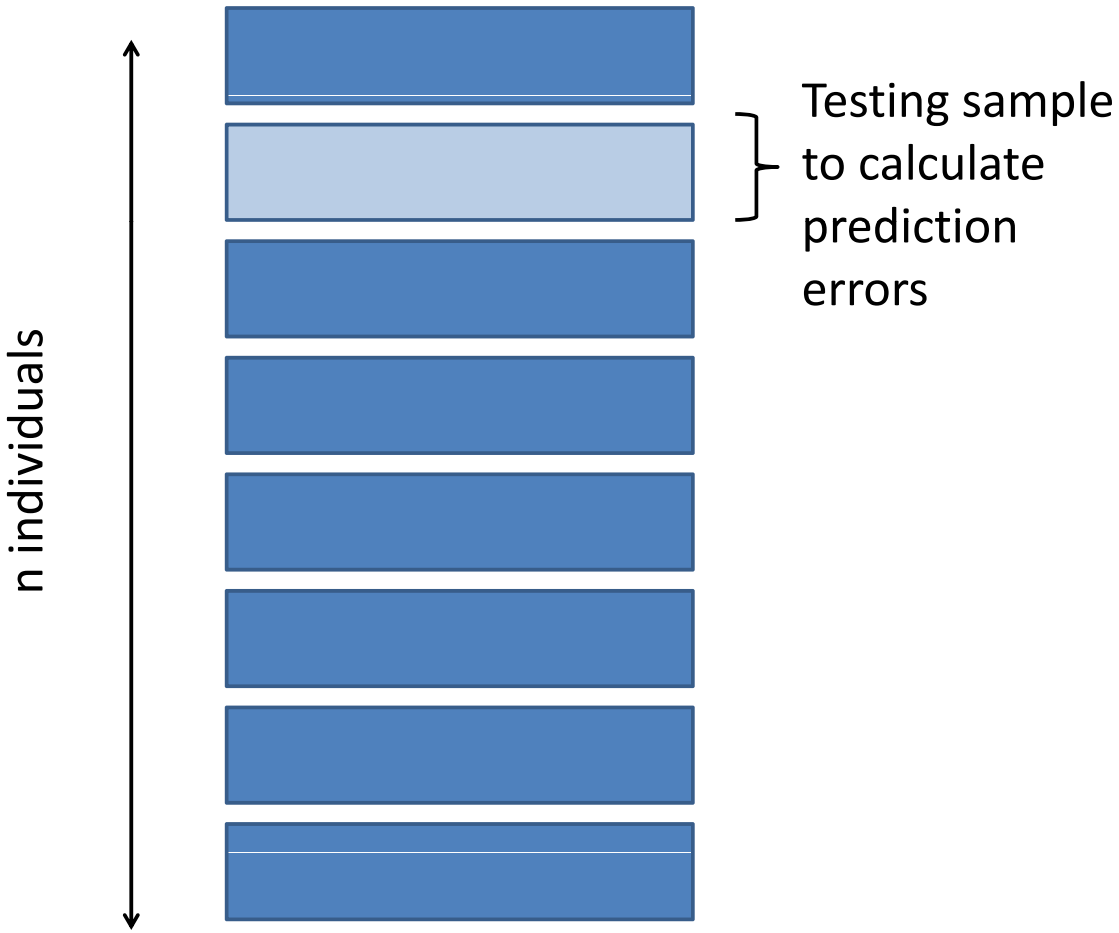
Evaluation d'une performance de classification

Si *n* est petit, procédure de validation croisée à *K* segments



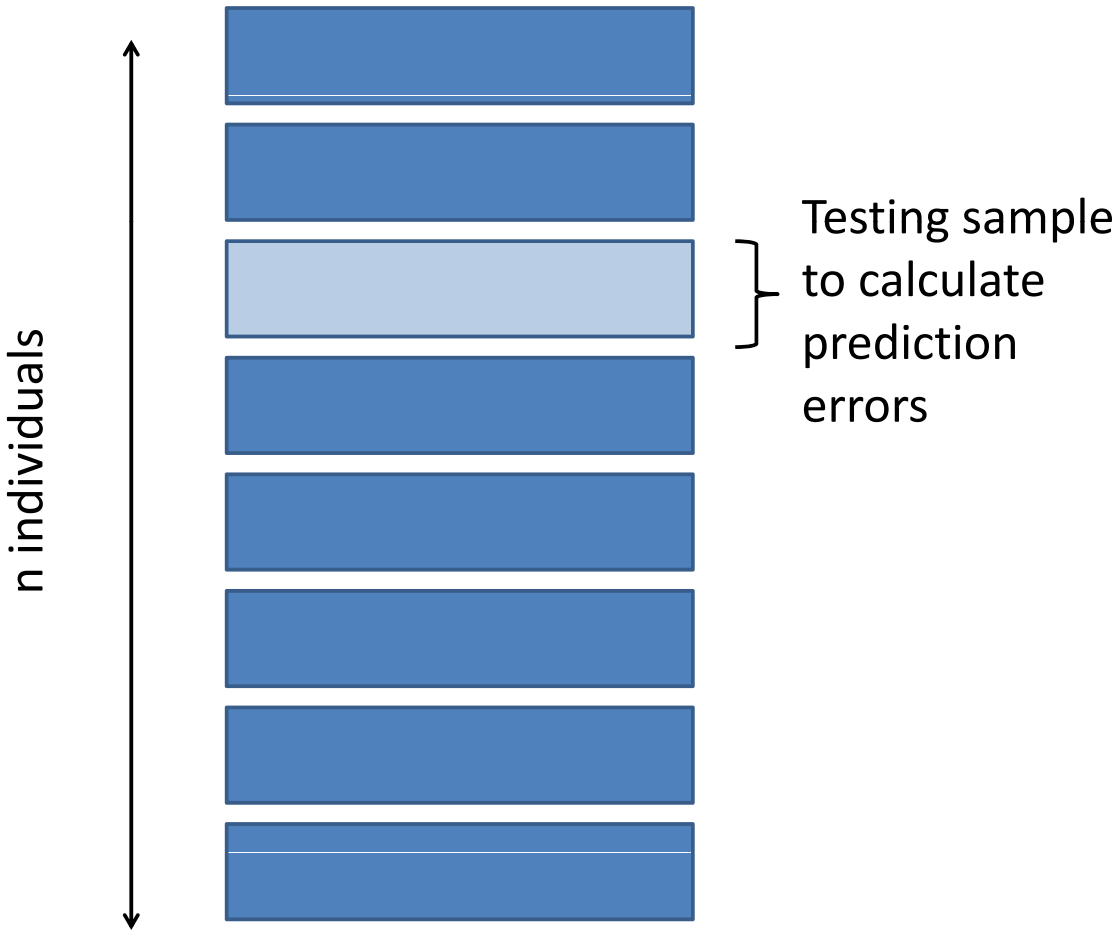
Evaluation d'une performance de classification

Si *n* est petit, procédure de validation croisée à *K* segments



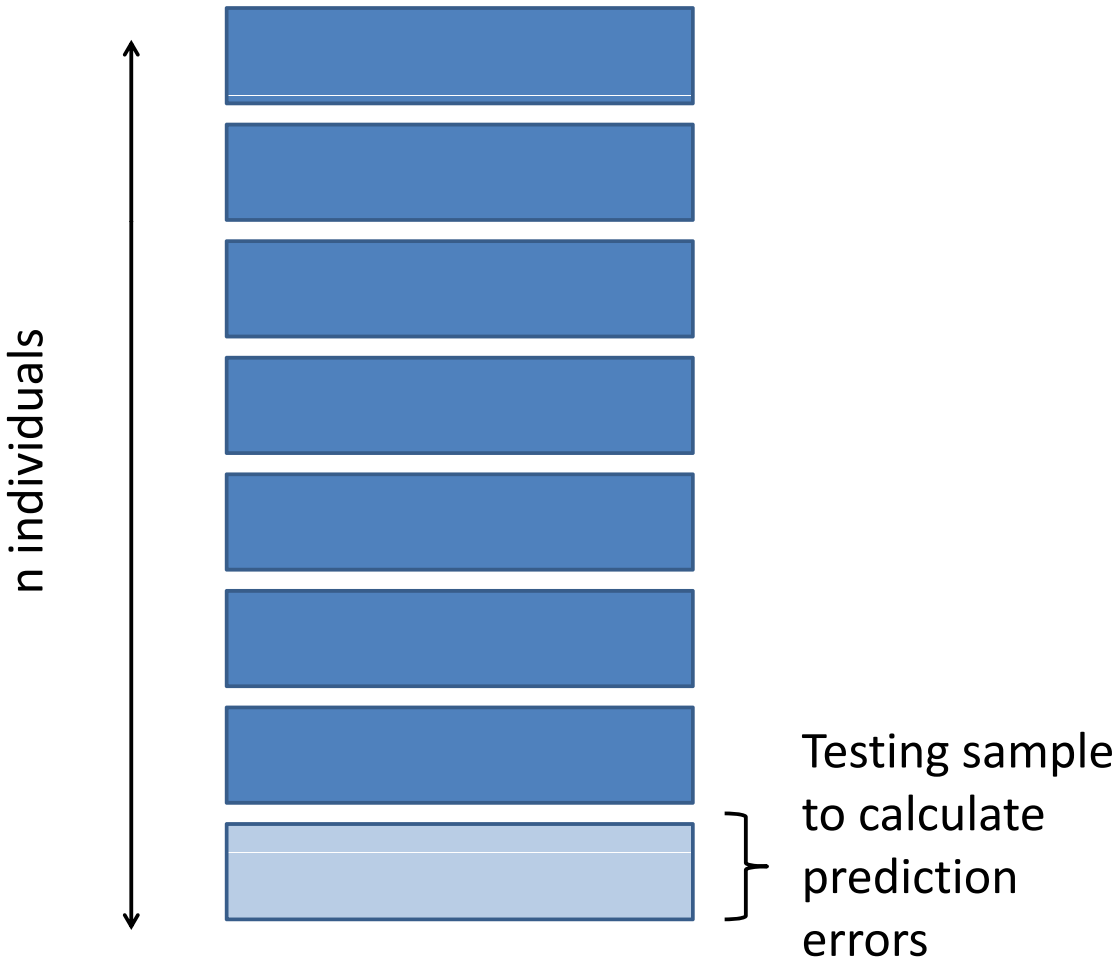
Evaluation d'une performance de classification

Si *n* est petit, procédure de validation croisée à *K* segments



Evaluation d'une performance de classification

Si *n* est petit, procédure de validation croisée à *K* segments



Evaluation d'une performance de classification

Choix de K :

- Selon le temps de calcul pour l'ajustement de la règle de classification, $K = 3$ et $K = 10$ sont souvent choisis.
- Si n est petit, $K = n$ peut-être recommandé : leave-one-out cross-validation.

-